Chuyên đề giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

§ 1. Cơ sở lí thuyết

Định nghĩa 0.1.

Cho $f(x)$ và miền D
a) M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ nếu:
$\begin{cases} f(x) \leq M, \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, \ f(x_0) = M \end{cases}$

$$M = \max_{x \in D} f(x)$$

b) M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ nếu:
$\begin{cases} f(x) \geq m, \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, \ f(x_0) = m \end{cases}$

$$m = \min_{x \in D} f(x)$$

Ví dụ 0.1.

$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ ta có $\sin(x) \leq 1$ và $\cos(x) \leq 1$ suy ra $f(x) = \sin(x) + \cos(x) \leq 2$. Nhưng $M \neq 2$ vì $\sin(x), \cos(x)$ không thể đồng thời bằng 1.
Ta có $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$. Do đó $M = \sqrt{2}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = 1$.

Ví dụ 0.2.

Cho $x, y, z > 0$ và $P = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{x+y}{z}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của P.
Ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y+z}{x} \geq 2 \\ \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z+x}{y} \geq 2 \\ \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{x+y}{z} \geq 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $P \geq 6$. Nhưng $m \neq 6$ vì không có x, y, z nào để đẳng thức xảy ra.
$P = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{x+y}{z}$
$P = \left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + + \dfrac{z}{x+y}\right) + \left(\dfrac{y+z}{x} + + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{x+y}{z}\right)$
$P = \left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}\right) + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right)$
$P = \left(\dfrac{x+y+z}{y+z} + \dfrac{x+y+z}{z+x} + \dfrac{x+y+z}{x+y} - 3\right) + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right)$
$P = (x+y+z)\left(\dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x} + \dfrac{1}{x+y}\right) - 3 + \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) + \left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right)$

$P = \frac{1}{2}\left((x+y)+(y+z)+(z+x)\right)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)$
$\quad -3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$

Do đó $P \geq \frac{9}{2}-3+6=\frac{15}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Tính chất 0.2.

Cho $f(x)$ và miền D khi đó ta có:

$$\max_{x\in D} f(x) = -\min_{x\in D}\{-f(x)\}$$
$$\min_{x\in D} f(x) = -\max_{x\in D}\{-f(x)\}$$

Ví dụ 0.3.

Cho $x, y \geq 0, x+y \leq 6$ và $P = x^2y\,(4-\mathrm{x}-\mathrm{y})$. Hãy tìm $\min P$.

Đặt $Q = -P = x^2y\,(\mathrm{x}+\mathrm{y}-4)$

$D_1 = \{x+y \leq 4\}$ và $D_2 = \{4 \leq x+y \leq 6\}$.

$\max\limits_{x\in D_1} Q = 0$ do $x, y \geq 0$. Vậy $\min\limits_{x\in D_1} P = 0$.

$Q = 4\frac{x}{2}\frac{x}{2}y\,(\mathrm{x}+\mathrm{y}-4) \leq 4\left(\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}-2}{2}\right)^4 \leq 64$, $\max\limits_{x\in D_2} Q = 64$. Vậy $\min\limits_{x\in D_2} P = -64$. Từ đó suy ra $\min\limits_{x\in D} P = -64$

Tính chất 0.3.

Cho $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ và miền D khi đó ta có:

$\max\limits_{D} f(x) \leq \max\limits_{D} f_1(x) + \max\limits_{D} f_2(x)$

$\min\limits_{D} f(x) \geq \min\limits_{D} f_1(x) + \min\limits_{D} f_2(x)$

$\exists x_0 \in D, f_1(x_0) = \max\limits_{D} f_1(x), f_2(x_0) = \max\limits_{D} f_2(x)$ thì $\max\limits_{D} f(x) = \max\limits_{D} f_1(x) + \max\limits_{D} f_2(x)$

Ví dụ 0.4.

Cho $f(x) = \left(\cos^2(x)+\frac{1}{\cos^2(x)}\right)^2 + \left(\sin^2(x)+\frac{1}{\sin^2(x)}\right)^2$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Tìm $\min f(x)$).

$f(x) = \left(\cos^4(x)+\frac{1}{\cos^4(x)}\right) + \left(\sin^4(x)+\frac{1}{\sin^4(x)}\right) + 4$

$f(x) = \left(\cos^4(x)+\sin^4(x)\right) + \left(\frac{1}{\cos^4(x)}+\frac{1}{\sin^4(x)}\right) + 4$

$f(x) = \left(1-\frac{\sin^2(2x)}{2}\right) + 16\frac{1-\frac{\sin^2(2x)}{2}}{\sin^4(2x)} + 4$

$f(x) = 5-\frac{\sin^2(2x)}{2} + 16\frac{1-\frac{\sin^2(2x)}{2}}{\sin^4(2x)}$.

$f(x) = 5 + f_1(x) + f_2(x)$.

Ta có $\min f_1(x) = -\frac{1}{2}$, dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2(2x) = 1$, $\min f_2(x) = 8$, dấu

$" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2(2x) = 1$.
Vậy $\min f(x) = \dfrac{25}{2}$, dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2(2x) = 1$.

Tính chất 0.4.

a) $\max\limits_D f(x) = \sqrt[2n+1]{\max\limits_D f^{2n+1}(x)}$ **b)** $\min\limits_D f(x) = \sqrt[2n+1]{\min\limits_D f^{2n+1}(x)}$
Nếu $f(x) \geq 0$ thì ta có:
a) $\max\limits_D f(x) = \sqrt[2n]{\max\limits_D f^{2n}(x)}$ **b)** $\min\limits_D f(x) = \sqrt[2n]{\min\limits_D f^{2n}(x)}$

Ví dụ 0.5.

Cho $f(x) = \sqrt{1+\sin(x)} + \sqrt{1+\cos(x)}$
Ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó:
$f^2(x) = 2 + (\sin(x)+\cos(x)) + 2\sqrt{1+\sin(x)+\cos(x)+\sin(x)\cos(x)}$
Mặt khác $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{(\sin(x)+\cos(x))^2 - 1}{2}$, đặt $t = \sin(x)+\cos(x), |t| \leq \sqrt{2}$.
$g(t) = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \dfrac{t^2-1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}\,|t+1|$.
$\min g(t) = 1, \max g(t) = 4 + 2\sqrt{2}$ suy ra $\min f(x) = 1, \max g(x) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

§ 2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản

Cho $a, b, c > 0$ khi đó $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ và $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

Ví dụ 0.6.

Cho $x, y, z > 0, x+y+z = 1$ và $P = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} + \dfrac{z}{z+1}$. Tìm $\max P$.
$P = \dfrac{x+1-1}{x+1} + \dfrac{y+1-1}{y+1} + \dfrac{z+1-1}{z+1}$
$P = 3 - \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1}\right)$
$(x+1+y+1+z+1)\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1}\right) \geq 9$
dó đó $\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+1}\right) \geq \dfrac{9}{4}$
suy ra $P \leq \dfrac{3}{4}$. $\max P = \dfrac{3}{4}$. Dấu $" = "$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 0.7.

Cho $x, y, z > 0, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$ và $P = \dfrac{1}{2x+y+z} + \dfrac{1}{x+2y+z} + \dfrac{1}{2x+y+2z}$. Tìm $\max P$.
$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geq 4$ do đó $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$
$\dfrac{1}{2x+y+z} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{y+z}\right) \leq \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\right]$
$\dfrac{1}{x+2y+z} \leq \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{z+x}\right) \leq \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{x+y}\right) \le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]$

$P \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 0.8.

Cho $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \le 3$ và $P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}$. Hãy tìm $\min P$.

Ta có $(1+xy+1+yz+1+zx)\left(\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}\right) \ge 9$

$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx} \ge \frac{9}{1+xy+1+yz+1+zx} = \frac{9}{3+xy+yz+zx}$

$P \ge \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

$\min P = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 0.9.

Cho $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ và $P = \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$

Ta có $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = 3$ và $P = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{1+\frac{1}{y}} + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}$

Đặt $u = \sqrt{\frac{x}{yz}}, v = \sqrt{\frac{y}{zx}}, t = \sqrt{\frac{z}{xy}}$ ta viết lại giả thiết

Cho $u, v, t > 0, u^2 + v^2 + t^2 = 3$ và $P = \frac{1}{1+uv} + \frac{1}{1+vt} + \frac{1}{1+tu}$. Hãy tìm $\min P$.

Ví dụ 0.10.

Cho $x, y > 0, x + y < 1$ và $P = \frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} + x + y$. Tìm $\min P$.

$P = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} + 1 + y + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2$

$P = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2$

Ta có $(1-x+1-y+x+y)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\right) \ge 9$

$P \ge \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{3}$.

$\min P = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 0.11.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ và $P = \frac{3x-1}{x^2-1} + \frac{3y-1}{y^2-1} + \frac{3z-1}{z^2-1}$. Tìm $\max P$.

$P = \frac{2(x-1)+x+1}{x^2-1} + \frac{2(y-1)+y+1}{y^2-1} + \frac{2(z-1)+z+1}{z^2-1}$

$P = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{y+1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

$P=\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{y+1}+\dfrac{2}{z+1}\right)-\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1-z}\right)$
$P=\left(\dfrac{2}{2x+y+z}+\dfrac{2}{x+2y+z}+\dfrac{2}{x+y+2z}\right)-\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)$
Mặt khác: $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}\geq\dfrac{4}{x+2y+z}$
$\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\geq\dfrac{4}{x+y+2z}$
$\dfrac{1}{z+x}+\dfrac{1}{x+y}\geq\dfrac{4}{2x+y+z}$
Do đó: $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\geq\dfrac{2}{x+2y+z}+\dfrac{2}{x+y+2z}+\dfrac{2}{2x+y+z}$
Suy ra $P\leq 0$, Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

§ 3. Phương pháp sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi

Ví dụ 0.12.

Cho $x,y,z>0, \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=2$ và $P=xyz$. Tìm $\max P$.
$\dfrac{1}{1+x}=\left(1-\dfrac{1}{1+y}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+z}\right)=\dfrac{y}{1+y}+\dfrac{z}{1+z}\geq 2\sqrt{\dfrac{yz}{(1+y)(1+z)}}$
$\dfrac{1}{1+y}=\left(1-\dfrac{1}{1+z}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{z}{1+z}+\dfrac{x}{1+x}\geq 2\sqrt{\dfrac{zx}{(1+z)(1+x)}}$
$\dfrac{1}{1+z}=\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+y}\right)=\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}\geq 2\sqrt{\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)}}$
$\dfrac{1}{(1+x)(1+y)(1+t)}\geq 8\dfrac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+t)}$
$P\geq\dfrac{1}{8}$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $\max P=\dfrac{1}{8}$.

Ví dụ 0.13.

Cho $x,y,x>0, x+y+z=1$ và $P=\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}$. Tìm $\max P$.
$x+y+z=1$ suy ra $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z)$
$y+zx=y(x+y+z)+zx=(y+z)(y+x)$
$z+xy=z(x+y+z)+xy=(z+x)(z+y)$
$P=\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}$
$\leq\dfrac{2x+y+z}{2}+\dfrac{x+2y+z}{2}+\dfrac{x+y+2z}{2}=2(x+y+x)=1$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 0.14.

Cho $x,y,z>0, x+y+z=1$ và $P=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy+z}}+\dfrac{y+z}{\sqrt{yz+x}}+\dfrac{z+x}{\sqrt{zx+y}}$. Tìm $\min P$.

$P=\dfrac{1-z}{\sqrt{(1-x)(1-y)}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{(1-y)(1-z)}}+\dfrac{1-y}{\sqrt{(1-z)(1-x)}}\geq 3$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.
$\min P=3$.

Ví dụ 0.15.

Cho $x,y,z>0, x+y+z=xyz$ và $P=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
Đặt $u=\dfrac{1}{x}, v=\dfrac{1}{y}, t=\dfrac{1}{z}$ suy ra $uv+vt+tu=1$ và $P=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}+\dfrac{v}{\sqrt{1+v^2}}+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
$u^2+1=(u+v)(u+t), v^2+1=(v+t)(v+u), t^2+1=(t+u)(t+v)$
$P=\dfrac{u}{\sqrt{(u+v)(u+t)}}+\dfrac{v}{\sqrt{(v+t)(v+u)}}+\dfrac{t}{\sqrt{(t+u)(t+v)}}$
$P=\sqrt{\dfrac{u}{u+v}}\sqrt{\dfrac{u}{u+t}}+\sqrt{\dfrac{v}{v+t}}\sqrt{\dfrac{v}{v+u}}+\sqrt{\dfrac{t}{t+u}}\sqrt{\dfrac{t}{t+v}}\leq\dfrac{3}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $u=v=t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ tương ứng với $x=y=z=\sqrt{3}$.

Ví dụ 0.16.

Cho $x,y>0, x+y=1$ và $P=\dfrac{1}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{xy}$
$x^3+y^3+3xy=1$ suy ra $P=\dfrac{x^3+y^3+3xy}{x^3+y^3}+\dfrac{x^3+y^3+3xy}{xy}=4+\dfrac{3xy}{x^3+y^3}+\dfrac{x^3+y^3}{xy}\geq 4+2\sqrt{3}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}}{2}$.

§ 4. Phương pháp thêm bớt hạng tử

Ví dụ 0.17.

Cho $x,y,z>0, xyz=1$ và $P=\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}$
$\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{1+y}{8}+\dfrac{1+z}{8}\geq 3x$
$\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{1+z}{8}+\dfrac{1+x}{8}\geq 3y$
$\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\dfrac{1+x}{8}+\dfrac{1+y}{8}\geq 3z$
Do đó $P\geq\dfrac{11}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{15}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
$\min P=\dfrac{15}{2}$.

Ví dụ 0.18.

Cho $x, y > 0, xy = 1$ và $P = \dfrac{x^3}{1+y} + \dfrac{y^3}{1+x}$. Tìm $\min P$.

$\dfrac{x^3}{1+y} + \dfrac{1+y}{4} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{3}{2}x$

$\dfrac{y^3}{1+x} + \dfrac{1+x}{4} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{3}{2}y$

$P \geq \dfrac{5}{4}(x+y) - \dfrac{3}{2} \geq 1$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

$\min P = 1$.

Ví dụ 0.19.

Cho $x, y, z > 0, xy + yz + zx \geq 3$ và $P = \dfrac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \dfrac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \dfrac{z^3}{\sqrt{x^2+3}}$. Tìm $\min P$.

$\dfrac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \dfrac{x^3}{\sqrt{y^2+3}} + \dfrac{y^2+3}{8} \geq \dfrac{3}{2}x^2$

$\dfrac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \dfrac{y^3}{\sqrt{z^2+3}} + \dfrac{z^2+3}{8} \geq \dfrac{3}{2}y^2$

$\dfrac{z^3}{\sqrt{x^2+3}} + \dfrac{z^3}{\sqrt{x^2+3}} + \dfrac{x^2+3}{8} \geq \dfrac{3}{2}z^2$

$P \geq \dfrac{11}{8}\left(x^2+y^2+z^2\right) - \dfrac{9}{8} \geq 4$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Ví dụ 0.20.

Cho $x, y, z > 0, xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1$ và $P = \dfrac{x^6}{x^3+y^3} + \dfrac{y^6}{y^3+z^3} + \dfrac{z^6}{z^3+x^3}$. Tìm $\min P$.

Đặt $X = x^3, Y = y^3, Z = z^3$ khi đó $X, Y, Z > 0, \sqrt{XY} + \sqrt{YZ} + \sqrt{ZX} = 1$

$$P = \frac{X^2}{X+Y} + \frac{Y^2}{Y+Z} + \frac{Z^2}{Z+X}.$$

$\dfrac{X^2}{X+Y} + \dfrac{X+Y}{4} \geq X$

$\dfrac{Y^2}{Y+Z} + \dfrac{Y+Z}{4} \geq Y$

$\dfrac{Z^2}{Z+X} + \dfrac{Z+X}{4} \geq Z$

$P \geq \dfrac{1}{2}(X+Y+Z) \geq \dfrac{1}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z = \dfrac{1}{3}$ tương ứng $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

$\min P = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 0.21.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 3xyz$ và $P = \dfrac{yz}{x^3(z+2y)} + \dfrac{zx}{y^3(x+2z)} + \dfrac{xy}{z^3(y+2x)}$. Tìm $\min P$.

Đặt $X = \dfrac{1}{x}, Y = \dfrac{1}{y}, Z = \dfrac{1}{z}$ suy ra $XY + YZ + ZX = 3$ và $P = \dfrac{X^3}{Y+2Z} + \dfrac{Y^3}{Z+2X} + \dfrac{Z^3}{X+2Y}$

$\dfrac{9X^3}{Y+2Z} + X\left(Y+2Z\right) \geq 6X^2$

$\dfrac{9Y^3}{Z+2X} + X\left(Z+2X\right) \geq 6Y^2$

$\dfrac{9Z^3}{X+2Y} + X\left(X+2Y\right) \geq 6Z^2$

$9P \geq 6\left(X^2+Y^2+Z^2\right) - 3\left(XY+YZ+ZX\right) = 6\left(X^2+Y^2+Z^2\right) - 9 \geq 9$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z = 1$ tương ứng $x = y = z = 1$.

$\min P = 1$.

Ví dụ 0.22.

Cho $x, y, z > 0, xy + yz + zx = 9$ và $P = \dfrac{x^5}{y^3} + \dfrac{y^5}{z^3} + \dfrac{z^5}{x^3}$. Tìm $\min P$.

$\dfrac{x^5}{y^3} + xy \geq 2\dfrac{x^2}{y}$

$\dfrac{y^5}{z^3} + yz \geq 2\dfrac{y^2}{z}$

$\dfrac{z^5}{x^3} + zx \geq 2\dfrac{z^2}{x}$

$P \geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(xy+yz+zx\right) = 2\left(x^2+y^2+z^2\right) - 9 \geq 9$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

$\min P = 9$.

§ 5. Phương pháp thêm bớt hằng số

Ví dụ 0.23.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = \dfrac{3}{4}$ và $P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3z}$. Tìm $\max P$.

$\sqrt[3]{x+3y} = \sqrt[3]{x+3y}.1.1 \leq \dfrac{x+3y+1+1}{3} = \dfrac{x+3y+2}{3}$

$\sqrt[3]{y+3z} = \sqrt[3]{y+3z}.1.1 \leq \dfrac{y+3z+1+1}{3} = \dfrac{y+3z+2}{3}$

$\sqrt[3]{z+3x} = \sqrt[3]{z+3x}.1.1 \leq \dfrac{z+3x+1+1}{3} = \dfrac{z+3x+2}{3}$

$P \leq \dfrac{4}{3}\left(x+y+z\right) + 2 = 3$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{4}$.

$\max P = 3$.

Ví dụ 0.24.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ và $P = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}$. Tìm $\max P$.

$\sqrt{\left(1-x\right)\dfrac{2}{3}} \leq \dfrac{1-x+\dfrac{2}{3}}{2} = \dfrac{\dfrac{5}{3}-x}{2}$

$\sqrt{\left(1-y\right)\dfrac{2}{3}} \leq \dfrac{1-y+\dfrac{2}{3}}{2} = \dfrac{\dfrac{5}{3}-y}{2}$

$\sqrt{(1-z)\frac{2}{3}} \le \frac{1-z+\frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}-z}{2}$

$\sqrt{\frac{2}{3}}P \le \frac{5}{6} - \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{1}{3}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

$\max P = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ví dụ 0.25.

Cho $x, y, x > 0, x+y+z = 3xyz$ và $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^3}$. Tìm $\min P$.

$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3$

$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 1 \ge \frac{3}{xy}$

$\frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 1 \ge \frac{3}{yz}$

$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} + 1 \ge \frac{3}{zx}$

$2P \ge 3\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) - 3$ suy ra $P \ge 3$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 0.26.

Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{yz}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ và $P = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}$. Tìm $\min P$.

$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{1}{2} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \frac{xy}{\sqrt[3]{(y+z)(z+x)}}$

$\frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} + \frac{1}{2} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \frac{yz}{\sqrt[3]{(z+x)(x+y)}}$

$\frac{z^3}{x+y} + \frac{x^3}{y+z} + \frac{1}{2} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \frac{zx}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)}}$

$2P \ge \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{xy}{\sqrt[3]{(y+z)(z+x)}} + \frac{yz}{\sqrt[3]{(z+x)(x+y)}} + \frac{zx}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)}}\right) - \frac{3}{2}$

$P \ge \frac{3}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

$\min P = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 0.27.

Cho $x, y > 0, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{xy}{6} = 3$ và $P = 27x^3 + 8y^3$. Tìm $\min P$.

$\frac{x^3}{8} + 1 + 1 \ge \frac{3}{2}x$

$\frac{y^3}{27} + 1 + 1 \ge y$

$\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27} + 1 \ge \frac{3}{6}xy$

$2\left(\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{27}\right) \geq 3\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{6}\right)-5$
$P \geq 432$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=2, y=3$.
$\min P = 432$.

§ 6. Phương pháp dùng bất đẳng thức Côsi bằng cách nhóm số hạng

Ví dụ 0.28.

Cho $x, y > 0, x^2+y^2=1$ và $P=(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Tìm $\min P$.
$P = 2+\frac{1}{y}+x+\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y+\frac{y}{x}$
Nhóm sai: $P=2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$
Nhóm đúng: $P=2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)$
$P=2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)$
$P \geq 2+2\sqrt{2}+2+\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4+3\sqrt{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$\min P = 4+3\sqrt{2}$.

Ví dụ 0.29.

Cho $x, y, z > 0, x+2y+3z \geq 20$ và $P=x+y+z+\frac{3}{x}+\frac{9}{2y}+\frac{4}{z}$. Tìm $\min P$.
Nhóm sai: $P=\left(x+\frac{3}{x}\right)+\left(y+\frac{9}{2y}\right)+\left(z+\frac{4}{z}\right)$
Nhóm đúng: $P=\left(\frac{3}{4}x+\frac{3}{x}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{9}{2y}\right)+\left(\frac{1}{4}z+\frac{4}{z}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{2}{4}y+\frac{3}{4}z\right)$
$P=8+\left(\frac{1}{4}x+\frac{2}{4}y+\frac{3}{4}z\right) \geq= 13$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=2, y=3, z=4$.
$\min P = 13$.

Ví dụ 0.30.

Cho $x, y, z > 0, x+y+z \leq \frac{3}{2}$ và $P=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Tìm $\min P$.
$P=\left(x^2+\frac{1}{8x}+\frac{1}{8x}\right)+\left(y^2+\frac{1}{8y}+\frac{1}{8y}\right)+\left(z^2+\frac{1}{8z}+\frac{1}{8z}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$
$P \geq \frac{9}{4}+\frac{9}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{27}{4}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.
$\min P = \frac{27}{4}$.

Ví dụ 0.31.

Cho $x, y, z > 0, x+y+z=3xyz$ và $P=\frac{3}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{3}{z^2}$. Tìm $\min P$.
Đặt $X=\frac{1}{x}, Y=\frac{1}{y}, Z=\frac{1}{z}$ suy ra $X, Y, Z > 0, XY+YZ+ZX=3$

$$P = 3X^2 + Y^2 + 3Z^2$$

$P = \left(2X^2 + \dfrac{1}{2}Y^2\right) + \left(2Z^2 + \dfrac{1}{2}Y^2\right) + \left(X^2 + Z^2\right)$
$P \geq 2XY + 2YZ + 2ZX = 6.$
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $X = \dfrac{\sqrt{15}}{5}, Y = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}, Z = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.
$\min P = 6.$

§ 7. Phương pháp sử dụng kĩ thuật ngược dấu trong bất đẳng thức Côsi

Ví dụ 0.32.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ và $P = \dfrac{x}{1+y^2} + \dfrac{y}{1+z^2} + \dfrac{z}{1+x^2}$. Tìm $\min P$.
$P = x - \dfrac{xy^2}{1+y^2} + y - \dfrac{yz^2}{1+z^2} + z - \dfrac{zx^2}{1+x^2}$. Tìm $\min P$.
$P \geq (x+y+z) - \dfrac{1}{2}(xy+yz+zx) = 3 - \dfrac{1}{2}(xy+yz+zx)$
$9 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx)$
Do đó $(xy+yz+zx) \leq 3$
$P \geq 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.
$\min P = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 0.33.

Cho $x, y, z, t > 0, \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = 2$ và $P = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} + \dfrac{y^3}{y^2+z^2} + \dfrac{z^3}{z^2+t^2} + \dfrac{t^3}{t^2+x^2}$. Tìm $\min P$.
$\dfrac{x^3}{x^2+y^2} = x - \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$
$\dfrac{y^3}{y^2+z^2} = y - \dfrac{yz^2}{y^2+z^2}$
$\dfrac{z^3}{z^2+t^2} = z - \dfrac{zt^2}{z^2+t^2}$
$\dfrac{t^3}{t^2+x^2} = t - \dfrac{tx^2}{t^2+x^2}$
$P = (x+y+z+t) - \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} + \dfrac{yz^2}{y^2+z^2} + \dfrac{zt^2}{z^2+t^2} + \dfrac{tx^2}{t^2+x^2}\right) \geq \dfrac{1}{2}(x+y+z+t)$
$P \geq 4$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t = \dfrac{1}{2}$.
$\min P = 4.$

Ví dụ 0.34.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 3$ và $P = \dfrac{x^2}{x+2y^3} + \dfrac{y^2}{y+2z^3} + \dfrac{z^2}{z+2x^3}$. Tìm $\min P$.
$P = x - \dfrac{2xy^3}{x+2y^3} + y - \dfrac{2yz^3}{y+2z^3} + z - \dfrac{2zx^3}{z+2x^3} = 3 - 2\left(\dfrac{xy^3}{x+2y^3} + \dfrac{yz^3}{y+2z^3} + \dfrac{zx^3}{z+2x^3}\right)$
$P \geq 3 - \dfrac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x^2}y + \sqrt[3]{y^2}z + \sqrt[3]{z^2}x\right)$

$$\left.\begin{array}{l} xy+xy+y \geq 3\sqrt[3]{x^2}y \\ yz+yz+z \geq 3\sqrt[3]{y^2}z \\ zx+zx+x \geq 3\sqrt[3]{z^2}x \end{array}\right\} \text{suy ra } \sqrt[3]{x^2}y+\sqrt[3]{y^2}z+\sqrt[3]{z^2}x \leq 3.$$

$P \geq 1$. Dấu ” = ” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

$\min P = 4$.

Ví dụ 0.35.

Cho $x,y,z>0, x+y+z=3$ và $P=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}$. Tìm $\min P$.

$$\frac{1}{1+x^2}=1-\frac{x^2}{1+x^2}\geq 1-\frac{1}{2}x$$
$$\frac{1}{1+y^2}=1-\frac{y^2}{1+y^2}\geq 1-\frac{1}{2}y$$
$$\frac{1}{1+z^2}=1-\frac{z^2}{1+z^2}\geq 1-\frac{1}{2}z$$

$P\geq 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$. Dấu ” = ” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

$\min P=\dfrac{3}{2}$.

§ 8. Phương pháp dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Lý thuyết:

Cho 3 cặp bộ hai số $(a_1;b_1),(a_2;b_2),(a_3;b_3)$ suy ra $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq \left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)$.

* Dấu ” = ” xảy ra khi và chỉ khi $(a_1;b_1)\underset{k}{\sim}(a_2;b_2)$.

Suy ra $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$.

* Dấu ” = ” xảy ra khi và chỉ khi $(a_1;a_2;a_3)\underset{k}{\sim}(b_1;b_2;b_3)$

Trường hợp riêng:

Cho 3 cặp bộ hai số $(a_1;b_1),(a_2;b_2),(a_3;b_3)$ và $b_1,b_2,b_3>0$.

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$$

Ví dụ 0.36.

Cho $x,y,z>0, xyz=1$ và $P=\dfrac{1}{x^3(y+z)}+\dfrac{1}{y^3(z+x)}+\dfrac{1}{z^3(x+y)}$. Tìm $\min P$.

$P=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x(y+z)}+\dfrac{\left(\frac{1}{y}\right)^2}{y(z+x)}+\dfrac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{z(x+y)}\geq\dfrac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{2(xy+yz+zx)}=\dfrac{1}{2}(xy+yz+zx)\geq\dfrac{3}{2}$. Dấu ” = ” xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

$\min P=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 0.37.

Cho $x,y,z>0, x+y+z=3$ và $P=\dfrac{x^3}{y+z}+\dfrac{y^3}{z+x}+\dfrac{z^3}{x+y}$

$P=\dfrac{x^3}{y+z}+\dfrac{y^3}{z+x}+\dfrac{z^3}{x+y}=\dfrac{x^4}{x(y+z)}+\dfrac{y^4}{y(z+x)}+\dfrac{z^4}{z(x+y)}$. Tìm $\min P$.

$P \geq \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{xy+yz+zx} \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \geq \frac{3}{2}$. Vì $\left(x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx\right)$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
$\min P = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 0.38.

Cho $x,y,z>0, x^2+y^2+z^2=3$ và $P=\frac{x^3}{x+2y+3z}+\frac{y^3}{y+2z+3x}+\frac{z^3}{z+2x+3y}$. Tìm $\min P$.

$P=\frac{x^4}{(x+2y+3z)}+\frac{y^4}{y(y+2z+3x)}+\frac{z^4}{z(z+2x+3y)} \geq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$

$P \geq \frac{3^2}{3+5(xy+yz+zx)} \geq \frac{9}{3+15}=\frac{1}{2}$. Vì $\left(x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx\right)$.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.
$\min P = \frac{1}{2}$.

§ 9. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức cho trước

Ví dụ 0.39.

Cho $x,y,z>0, xyz=1$ và $P=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}$. Tìm $\max P$.

Ta có: $\left(x^3-y^3\right)\left(x^4-y^4\right) \geq 0$ suy ra $x^7+y^7 \geq x^3y^3(x+y)$

$x^2y^2+x^7+y^7 \geq x^2y^2+x^3y^3(x+y)=x^2y^2[1+xy(x+y)]$

$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7} \leq \frac{1}{1+xy(x+y)}=\frac{1}{xy(x+y+z)}$

$\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7} \leq \frac{1}{1+yz(y+z)}=\frac{1}{yz(x+y+z)}$

$\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7} \leq \frac{1}{1+zx(z+x)}=\frac{1}{zx(x+y+z)}$

$P \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}+\frac{1}{yz(x+y+z)}+\frac{1}{zx(x+y+z)}=1$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

$\max P = 1$.

Ví dụ 0.40.

Cho $x,y,z \in [0;2], x+y+z=3$ và $P=x^2+y^2+z^2$. Tìm $\max P$.

Ta có: $(2-x)(2-y)(2-z) \geq 0$

$\iff 8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz \geq 0$

$\iff 8-12+2(xy+yz+zx)-xyz \geq 0$

$\iff 8-12+\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]-xyz \geq 0$

$\iff 5-P-xyz \geq 0$

$\iff P \leq 5-xyz \leq 5$. Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi 1 số bằng 0, một số bằng 1 và một số bằng 2.

$\max P = 5$.

Ví dụ 0.41.

Cho $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $P = xyz + 2\left(1 + x + y + z + xy + yz + zx\right)$. Tìm $\min P$.

Từ giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ta suy ra $x; y; z \in [-1; 1]$

Từ đó ta có $\left(x + 1\right)\left(y + 1\right)\left(z + 1\right) \geq 0$

$\iff 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz \geq 0$

Mặt khác: $\left(1 + x + y + z\right)^2 \geq 0$

$\iff 1 + x + y + z + xy + yz + zx \geq 0$

Vậy $P \geq 0$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi có một số bằng -1 và hai số bằng 0.

$\min P = 0$.

Ví dụ 0.42.

Cho $x; y; z \in [0; 1]$ và $P = \dfrac{x}{1 + yz} + \dfrac{y}{1 + zx} + \dfrac{z}{1 + xy}$. Tìm $\max P$.

Dựa vào nhận xét: Cho $a, b, m > 0$ và $\dfrac{a}{b} \leq 1$ khi đó $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a + m}{b + m}$.

$a, b, m > 0$ và $\dfrac{a}{b} \geq 1$ khi đó $\dfrac{a}{b} \geq \dfrac{a + m}{b + m}$.

Ta có: $\left(1 - x\right)\left(1 - y\right) \geq 0$

$\iff 1 + xy \geq x + y$ (1)

Tương tự:

$1 + yz \geq y + z$ (2)

$1 + zx \geq z + x$ (3)

Áp dụng nhận xét và (2)ta có:

$\dfrac{x}{1 + yz} \leq \dfrac{x + x}{1 + yz + x} \leq \dfrac{2x}{x + y + z}$

Áp dụng nhận xét và (3)ta có:

$\dfrac{y}{1 + zx} \leq \dfrac{y + y}{1 + zx + y} \leq \dfrac{2y}{x + y + z}$

Áp dụng nhận xét và (1)ta có:

$\dfrac{z}{1 + xy} \leq \dfrac{z + z}{1 + xy + z} \leq \dfrac{2z}{x + y + z}$

Do đó $P \leq 2$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi có một số bằng 1 và hai số bằng 0.

$\max P = 2$.

§ 10. Phương pháp chiều biến thiên của hàm số

A. Trực tiếp dùng chiều biến thiên của hàm số

Ví dụ 0.43.

Cho $x, y \geq 0, x + y = 1$ và $P = \dfrac{x}{1 + y} + \dfrac{y}{1 + x}$. Tìm $\min P, \max P$.

Biến đổi $P = \dfrac{x^2 + y^2 + x + y}{xy + x + y + 1} = \dfrac{\left(x + y\right)^2 - 2xy + x + y}{xy + x + y + 1} = \dfrac{2 - 2xy}{2 + xy}$.

Đặt $t = xy$ suy ra $0 \le t \le \dfrac{1}{4}$.
Ta có $P(t) = \dfrac{2-2t}{2+t}, 0 \le t \le \dfrac{1}{4}$.
$P'(t) = \dfrac{-6}{(2+t)^2}$, suy ra $P(t)$ nghịch biến trên $\left[0; \dfrac{1}{4}\right]$
$P_{\min} = P\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{3}$ tương ứng $x = y = \dfrac{1}{2}$
$P_{\max} = P(0) = 1$ tương ứng $x = 0, y = 1$ hoặc $x = 1, y = 0$.

Ví dụ 0.44.

Cho $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ và $P = \sin x \cos^3 x$. Tìm $\min P, \max P$.
Cách 1. Nếu $f(x) \ge 0$ thì ta có:
a) $\max\limits_D f(x) = \sqrt{\max\limits_D \mathrm{f}^2(x)}$ **b)** $\min\limits_D f(x) = \sqrt{\min\limits_D \mathrm{f}^2(x)}$
$P^2 = sin^2 x cos^6 x = \left(1 - cos^2 x\right) cos^6 x$
Đặt $t = cos^2 x$ suy ra $t \in [0; 1]$.
$F(t) = t^3(1-t)$, $t \in [0; 1]$.
Ta có $0 \le F(t) \le \dfrac{27}{256}$.
Cách 2.

$$P^2 = sin^2 x cos^6 x = \left(1 - cos^2 x\right)\left(cos^6 x\right) = 27\left(1 - cos^2 x\right)\left(\frac{cos^2 x}{3}\right)\left(\frac{cos^2 x}{3}\right)\left(\frac{cos^2 x}{3}\right)$$
$$\le 27\left(\frac{1 - cos^2 x + \dfrac{cos^2 x}{3} + \dfrac{cos^2 x}{3} + \dfrac{cos^2 x}{3}}{4}\right)^4 = 27.\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{27}{256}.$$

Vậy $0 \le P^2 \le \dfrac{27}{256}$. $P^2_{\min} = 0$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $cosx = 0$ hoặc $cosx = 1$, $P^2_{\max} = \dfrac{27}{256}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $cosx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
$\min P = 0, \max P = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$.

Ví dụ 0.45.

Cho $x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = \sqrt{1 + sinx} + \sqrt{1 + cosx}$. Tìm $\min f(x), \max f(x)$.
Nếu $f(x) \ge 0$ thì ta có:
a) $\max\limits_D f(x) = \sqrt{\max\limits_D \mathrm{f}^2(x)}$ **b)** $\min\limits_D f(x) = \sqrt{\min\limits_D \mathrm{f}^2(x)}$
Ta có $f^2(x) = 2 + sinx + cosx + 2\sqrt{1 + sinx + cosx + sinxcosx}$
Đặt $t = sinx + cosx$ thì $sinxcosx = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ và $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
Suy ra $F(t) = 2 + t + 2\sqrt{1 + t + \dfrac{t^2 - 1}{2}} = 2 + t + 2\sqrt{\dfrac{t^2 + 2t + 1}{2}} = 2 + t + \sqrt{2}\,|t + 1|$, $t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.
B. Kết hợp chiều biến thiên và các biến đổi phụ
Bước 1:

– Bất đẳng thức trung gian

– Biến đổi đại số

Suy ra bài toán mới về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bước 2:

Giải bài toán mới.

Ví dụ 0.46.

Cho $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2}$. Tìm $\min, \max$.

Điều kiện để $f(x)$ có nghĩa $-3 \le x \le 6$

Đặt $u = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$

Suy ra $9 \le u^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 9 + 9$

Suy ra $3 \le u \le 3\sqrt{2}$ và $\sqrt{18+3x-x^2} = \dfrac{u^2-9}{2}$

Suy ra $F(u) = u - \dfrac{u^2-9}{2}$

$= -\dfrac{1}{2}u^2 + u + \dfrac{9}{2}$ với $3 \le u \le 3\sqrt{2}$.

Suy ra $\min\limits_{[-3;6]} f(x) = \min\limits_{[3;3\sqrt{2}]} F(u) = F(3\sqrt{2}) = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$\max\limits_{[-3;6]} f(x) = \max\limits_{[3;3\sqrt{2}]} F(u) = F(3) = 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$

Ví dụ 0.47.

Cho $x \in [1;2], y \in [3;4]$ và $P = \dfrac{y^4}{x^4} + \dfrac{x^4}{y^4} - \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, tìm $\min, \max$.

Ta có:

$\dfrac{y^4}{x^4} + \dfrac{x^4}{y^4} = \left(\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{y^2}\right)^2 - 2$

$\dfrac{y^4}{x^4} + \dfrac{x^4}{y^4} = \left[\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)^2 - 2\right]^2 - 2$

$\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{y^2} = \left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)^2 - 2$

Đặt $t = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ thì $g(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4$ và $t \in \left[\dfrac{13}{6}; \dfrac{17}{4}\right]$

(vì ta có $t = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, đặt $u = \dfrac{x}{y}$ thì $t = u + \dfrac{1}{u}$ với $\dfrac{1}{4} \le u \le \dfrac{2}{3}$)

$\min P = \min\limits_{\left[\frac{13}{6};\frac{17}{4}\right]} g(t) = \dfrac{1083}{54}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 3 \\ x = 3, y = 2 \end{array}\right.$

$\max P = \max\limits_{\left[\frac{13}{6};\frac{17}{4}\right]} g\left(t\right) = \dfrac{4249}{16}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 4 \\ x = 4, y = 1 \end{array}\right.$

Ví dụ 0.48.

Cho $x, y, z > 0, x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$, $P = x + y + z + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. Tìm $\min P$.

Ta có $(x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$ vậy $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq \dfrac{9}{x + y + z}$

Suy ra $P \geq x + y + z + \dfrac{9}{x + y + z}$ với $0 < x + y + z \leq \dfrac{3}{2}$

Đặt $t = x + y + z$ thì ta có $0 < t \leq \dfrac{3}{2}$ và $g(t) = t + \dfrac{9}{t}$

$\min P = \min\limits_{\left(0;\frac{3}{2}\right]} g\left(t\right) = \dfrac{15}{2}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 0.49.

Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $2\left(a^2 + b^2\right) + ab = (a + b)(ab + 2)$ và $P = 4\left(\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{a^3}\right) + 9\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}\right)$. Tìm min P.

$2\left(a^2 + b^2\right) + ab = (a + b)(ab + 2)$

$\Longleftrightarrow 1 + 2\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) = (a + b)\left(1 + \dfrac{2}{ab}\right) \geq (a + b)\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$.

Đặt $u = \sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ suy ra $2u^2\sqrt{2}u - 3 \geq 0$

$\Longleftrightarrow u \geq \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\dfrac{a^3}{b^3} = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$

$\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)^2 - 2$

Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ thì $F(t) = 4\left(t^3 - 3t\right) + 9\left(t^2 - 2\right) = 4t^3 + 9t^2 - 12t - 18,\ t \geq \dfrac{5}{2}$. Vì $\left(t = u^2 - 2 \geq \dfrac{5}{2}\right)$.

$\min P = \underset{t \geq \frac{5}{2}}{F(t)} = \dfrac{23}{4}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1$ hoặc $a = 1, b = 2$.

Ví dụ 0.50.

Cho $x \geq y, x \geq z, x, y, z \in [1; 4]$ và $P = \dfrac{x}{2x + 3y} + \dfrac{y}{y + z} + \dfrac{z}{z + x}$. Tìm $\min P$.

Nhận xét: Nếu $a, b > 0, ab \geq 1$ thì $\dfrac{1}{1 + a} + \dfrac{1}{1 + b} \geq \dfrac{2}{1 + \sqrt{ab}}$. Dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

$P=\dfrac{x}{2x+3y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$
$P=\dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}\geq\dfrac{1}{2+3\dfrac{y}{x}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$ (dấu bằng sảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{yz}=x$ hoặc $x=y$)
Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ thì $P\geq\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{t^2}}=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t^2}{3+2t^2}, t\in[1;2]$.
Xét hàm số $F(t)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t^2}{3+2t^2}, t\in[1;2]$